Zápočtový test – riešenie

1. Z definície L-transformácie odvoďte Laplaceov obraz funkcie: $y(t) = cos\, 2t$. 2,5 b

Riešenie:

Z definície Laplaceovej transformácie: $\mathbf{L}[y(t)] = Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty cos\, 2t\, e^{-st}dt$

za $cos\, 2t$ dosadíme z Eulerovho vzorca: $cos\, 2t = \dfrac{e^{2it} - e^{-2it}}{2}$, dostaneme:

$$Y(s) = \int_0^\infty \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2} e^{-st}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{2it}\, e^{-st} + e^{-2it}\, e^{-st})dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{(2i-s)t} + e^{(-2i-s)t})dt$$

na úpravu posledného vzťahu použijeme: $\int_0^\infty e^{at}dt = \left[\frac{1}{a}e^{at}\right]_0^\infty = -\frac{1}{a}$, my máme:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{(2i-s)t} + e^{(-2i-s)t})dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2i-s} + \frac{1}{2i+s}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{-(2i+s)+(2i-s)}{\left(-4-s^2\right)} = \frac{s}{s^2+4}.$$

Obraz funkcie $y(t) = cos\, 2t$ je $Y(s) = \dfrac{s}{s^2+4}$.

Poznámka:

Pointa uvedeného riešenia je v tom, že prevedieme pôvodný integrál (ktorý sa samozrejme dá riešiť aj priamo metódou per partes, ale nikomu z Vás sa to touto cestou nepodarilo doriešiť) na integrovanie exponenciálnej funkcie (ktorá sa integruje veľmi ľahko).

Niektorí z vás napísali rovno výsledok, ale to nie je odvodenie.

2. Je daná diferenciálna rovnica: $2y''(t) + 3y'(t) + y(t) = 15u(t)$, $y(0) = 10, y'(0) = 0$.

 a) Nájdite **<u>Laplaceov obraz riešenia</u>** tejto diferenciálnej rovnice. 2 b

 b) Napíšte, od akých veličín (resp. hodnôt) závisí výsledný priebeh funkcie y(t) určenej v úlohe a). 1 b

 **c) Nakreslite simulačnú schému na riešenie diferenciálnej rovnice v Simulinku. Vyznačte aj hodnoty parametrov jednotlivých blokov.* **1,5 b*

Riešenie:

a) Využijeme vzťahy pre Laplaceov obraz derivácie funkcie:

$\mathbf{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$

$\mathbf{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)$

Vstupný signál je zadaný ako všeobecná funkcia, takže jeho Laplaceov obraz bude tiež všeobecný: $\mathbf{L}[u(t)] = U(s)$

Laplaceov obraz danej diferenciálnej rovnice je:

$2\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 3\left[sY(s) - y(0)\right] + Y(s) = 15U(s)$

$2\left[s^2Y(s) - 10s\right] + 3\left[sY(s) - 10\right] + Y(s) = 15U(s)$

$Y(s)\left(2s^2 + 3s + 1\right) - 20s - 30 = 15U(s)$

Takže obraz riešenia danej diferenciálnej rovnice je: $Y(s) = \dfrac{20s + 30 + 15U(s)}{\left(2s^2 + 3s + 1\right)}$

b) Výsledný priebeh $y(t)$ závisí: 1. od veličiny $u(t)$ (to je **vnútená zložka riešenia**)
2. od počiatočných podmienok (**prechodná zložka riešenia)**

c) *V simulinkovej schéme bolo treba vyznačiť aj parametre blokov, napr. aj počiatočné podmienky integrátorov.*

Poznámky, časté chyby v príklade 2:
V časti a) sa pozoruhodne veľa z vás nevedelo dobre vysporiadať so všeobecne zadanou funkciou $u(t)$, hoci som ten obraz napísala na tabuľu. Niektorí sa rozhodli dosadiť obraz jednotkového skoku (hoci nič také v zadaní nie je), horšie dopadli tí, čo sa rozhodli pre $U(s)/s$, čo už vôbec nemá opodstatnenie. Dosť veľa chýb bolo aj v obrazoch derivácií!
V časti b) si len zopár z vás uvedomilo obe zložky riešenia (od vstupu a od poč. podmienok), hoci to bolo na prednáške aj na cvičeniach.
Čo ma dosť prekvapilo, skoro nikto nemal úplne správne Simulinkovú schému, hoci ste s tým robili dosť veľa v rámci cvičení. Za vážne chyby v schéme pokladám: tri integrátory (počet integrátorov je daný rádom diferenciálnej rovnice! my máme dif.rov. 2.rádu, tak aj integrátory v schéme budú 2!), tiež viacerí z vás mali v schéme tzv. algebraickú slučku, t.j. signál z výstupu bloku *Gain* sa privádzal zároveň na jeho vstup! To je nekorektné, Simulink to indikuje ako *algebraic loop*.
(To ako keby ste na získanie zápočtu potrebovali urobiť skúšku, ktorú ale môžete robiť len ak máte zápočet...)

3. a) Definujte, čo je prechodová funkcia. 1 b
b) Určte prechodovú funkciu $h(t)$, ak poznáte jej obraz v Laplaceovej transformácii:

$$H(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$ 2,5 b

c) Napíšte, akému typu systému zodpovedá obraz prechodovej funkcie *H(s)*, určte jeho zosilnenie a časové konštanty. 2 b
**d) Je systém s prechodovou funkciou z bodu b) stabilný? Odpoveď zdôvodnite.* **1,5 b*

Riešenie:
a) Prechodová funkcia je odozva systému na jednotkový skok.
b) K danému Laplaceovmu obrazu máme nájsť časovú funkciu (treba „odlaplacovať"):

$$H(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 3s} = \frac{2}{s(s+3)(s+1)}$$

Na inverznú Laplaceovu transformáciu využijeme Heavisideov rozvojový vzorec (= veta o rezíduách, na konci predn.3):

$$H(s)=\frac{2}{s^3+4s^2+3s}=\frac{2}{s(s+3)(s+1)}\to h(t)=\left[\frac{2}{(s+3)(s+1)}\right]_{s=0}e^{0t}+\left[\frac{2}{s(s+3)}\right]_{s=-1}e^{-t}+\left[\frac{2}{s(s+1)}\right]_{s=-3}e^{-3t}=$$

$$=\frac{2}{3}-e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-3t}$$

Takže prechodová funkcia zadaného systému je $h(t)=\frac{2}{3}-e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-3t}$.

Ten istý výsledok dostaneme rozkladom na parciálne zlomky:

$$H(s)=\frac{2}{s^3+4s^2+3s}=\frac{2}{s(s+3)(s+1)}=\frac{2/3}{s}+\frac{1/3}{s+3}+\frac{-1}{s+1}\to h(t)=\frac{2}{3}-e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-3t}.$$

c) Obraz prechodovej funkcie je súčinom obrazu jednotkového skoku a prenosu systému:

$H(s)=\frac{2}{s^3+4s^2+3s}=\frac{2}{s(s^2+4s+3)}=\frac{1}{s}G(s)$, takže prenos systému je:

$G(s)=\frac{2}{s^2+4s+3}$. Ide teda o systém 2.rádu. Póly sú reálne: -1, -3.

Zosilnenie dostaneme, keď do *G(s)* dosadíme *s*=0 (to zodpovedá ustálenému stavu):

$K=\frac{2}{3}$. Určenie časových konštánt:

$$G(s)=\frac{2}{s^2+4s+3}=\frac{2}{(s+1)(s+3)}=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{2/3}{(s+1)\left(\frac{1}{3}s+1\right)}.$$

Časové konštanty sú teda: $T_1=1, T_2=1/3$.

d) Uvedený systém 2. rádu je stabilný, **lebo jeho póly ležia v ľavej polrovine komplexnej roviny.**

Poznámky a časté chyby:

a) Túto úlohu väčšina z vás zvládla podľa očakávania.
b) Veľa z vás postupovalo správne, len sa vyskytlo veľa chýb z nepozornosti, alebo nedostatku počtárskej zručnosti (hoci čísla boli výrazne jednoduché). Pozor na hlúpe chyby.
c) Pri tejto jednoduchej úlohe väčšina stroskotala: veľa riešiteľov si neuvedomilo, že ide o systém 2. rádu a *s* v menovateli je z obrazu jednotkového skoku (obraz vstupného signálu). No a prečo ste mnohí neurčili časové konštanty, to už neviem...
d) Mnohí ste uviedli, že systém je stabilný, lebo nemá komplexné póly, čo je dosť scestná úvaha.

**Bonusová úloha:*
Nakreslite frekvenčné charakteristiky (Nyquistovu a Bodeho) systému s prenosovou funkciou $G(s)=\frac{1}{s}$.

Riešenie:

Nakreslíte si ľahko v Matlabe. **2 b*