Analýza a informatizácia dynamických systémov

ERIK KUČERA | 3APIN

Prenosová funkcia a testovacie signály

ERIK KUČERA

ANALÝZA A INFORMATIZÁCIA DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV | PREDNÁŠKA 3

Prenosová funkcia

• **Definícia:**
Prenosová funkcia LDS je podiel Laplaceovho obrazu výstupnej veličiny k obrazu vstupnej veličiny pri nulových počiatočných podmienkach.

1. $$LDR: a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

2. Laplaceova transformácia LDR pri nulových PP:

$$[a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0]\, Y(s) = [b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0]\, U(s)$$

3. **Prenosová funkcia**

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Prenosová funkcia je vlastnosťou <u>samotného dynamického systému</u> - nezávisí od vstupu.

Príklad sedačky (pružina-tlmič) – opis dynamiky:

$u(t) = F$
(tiaž vodiča)

$y\ (t)$
(posun sedačky)

Lineárna DR: $100 \,.\, y'' + 2400 \,.\, y' + 8000 \,.\, y = u$ (=800)

Prenosová funkcia sedačky: $\boxed{G(s) = \dfrac{0.01}{s^2 + 24s + 80}}$

Čo sa dá zistiť z prenosovej funkcie?

nuly systému

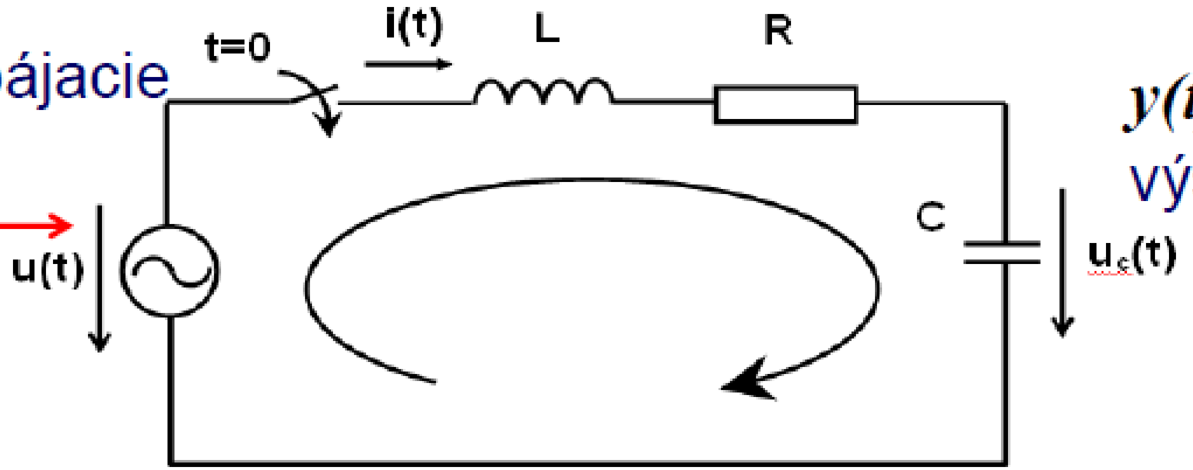
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0}=\frac{b_m(s-s_{z1}).(s-s_{z2})\ldots(s-s_{zm})}{a_n(s-s_1).(s-s_2)\ldots(s-s_n)}$$

póly systému

sú rozhodujúce pre dynamiku – určujú módy systému

Príklad RLC obvod – opis dynamiky:

u(t) = napájacie napätie



y(t)=u

$y(t)=u_c(t)$ výstupné napätie

Parametre:
L = 50 mH
C = 500μF
R = 2Ω

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + u_c(t)$$

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$i(0) = 0, \quad u_c(0) = 0$$

$$u(t) = RC\frac{du_c(t)}{dt} + LC\frac{d^2u_c(t)}{dt} + u_c(t)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{0{,}025.10^{-3}s^2 + 1.10^{-3}s + 1}}$$

viac o RLC -napr.: http://fyzika.jreichl.com/index.php?sekce=browse&page=316
animacia: http://www.ngsir.netfirms.com/englishhtm/RLC.htm

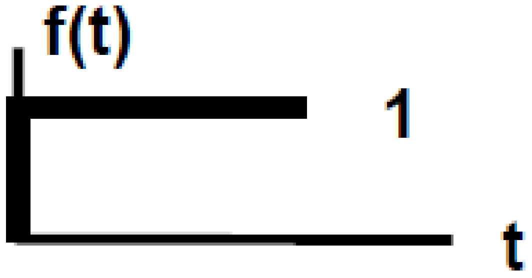
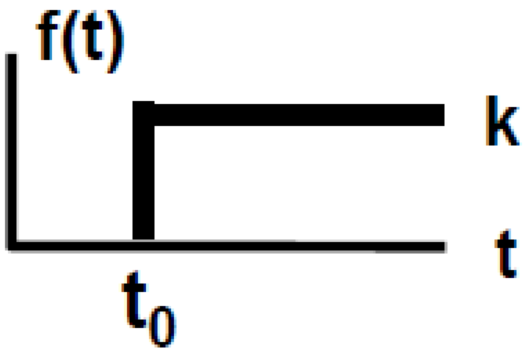
Utvořte přenos systému, je-li dána jeho diferenciální rovnice

a) $y''' + 4y'' + 0{,}5y' + 2y = 6u' + 3u$

a) $G(s) = \dfrac{6s + 3}{s^3 + 4s^2 + 0{,}5s + 2}$

Laplaceova transformácia základných typov signálov (funkcií) I

(uvažujeme signály, kde: $f(t) = 0$ pre $t < 0$)

	signál	Laplaceov obraz
	jednotkový skok: $\boxed{1(t)}$	$\longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{s}}$
	skok v čase t_0: $\boxed{k(t-t_0)}$	$\longrightarrow \boxed{\dfrac{k.e^{-st_0}}{s}}$
	exponenciálna funkcia: $\boxed{e^{-at}}$	$\longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{s+a}}$

Laplaceova transformácia základných typov signálov – Diracov impulz

Diracov impulz (nie je funkcia, ale vieme s ním narábať) – výhodný nástroj pre opis a riešenie dynamiky systémov. Je to impulz „nekonečne vysoký a nekonečne úzky“, s jednotkovou plochou (limitný prípad impulzu...)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pre } t = 0 \\ 0 & \text{pre } t \neq 0 \end{cases}$$

$\delta(t)$ **je deriváciou jednotkového skoku**

Základné vlastnosti Diracovho impulzu, s ktorými sa pracuje

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1}$$

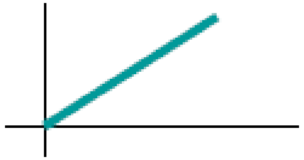
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t)\,dt = f(t_0)}$$

Laplaceov obraz: $\delta(t) \longrightarrow \boxed{1}$

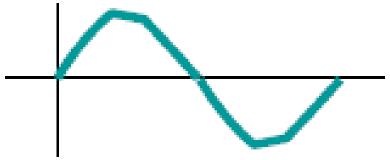
pozri:
http://controls.engin.umich.edu/wiki/index.php/Dirac_delta_%28impulse%29_function

Laplaceova transformácia základných typov signálov (funkcií) II

rampa: $t \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{s^2}}$



$sin(t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{\varpi}{s^2 + \varpi^2}}$



$cos(t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{s}{s^2 + \varpi^2}}$

$e^{-at} \sin \varpi t \longrightarrow \boxed{\dfrac{\varpi}{(s+a)^2 + \varpi^2}}$

$e^{-at} \cos \varpi t \longrightarrow \boxed{\dfrac{s+a}{(s+a)^2 + \varpi^2}}$

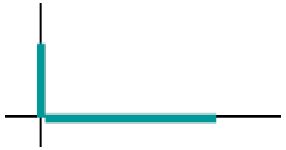
Impulzná funkcia:

Aká časová funkcia je vzorom prenosovej funkcie G(s)?

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow$$

Y(s)=G(s).U(s)

G(s) je obrazom Diracovho impulzu $\mathbf{L}^{-1}\left[G(s)\right] = g(t)$



$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow$$

$g(t)$ = impulzná funkcia

Y(s)=G(s).1

Impulzná funkcia je odozva systému na Diracov impulz.

Graf impulznej funkcie sa nazýva impulzná charakteristika.

z vlastností Laplaceovej transf.: $G(s) = \mathbf{L}\left[\int_0^t g(t-\tau)\delta(\tau)d\tau\right]$

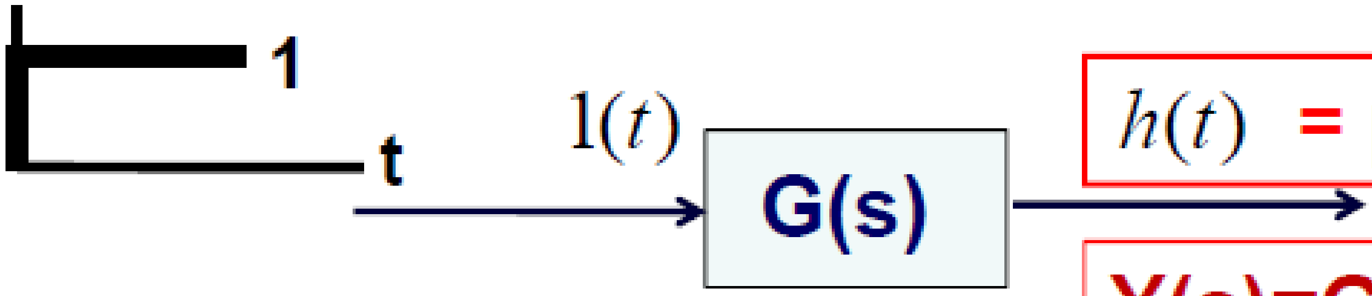
Příklad 3.7: Určete impulsní funkci a nakreslete impulsní charakteristiku pro regulační členy o přenosu

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\Downarrow$$

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}$$

Prechodová funkcia:



$h(t)$ = prechodová funkcia

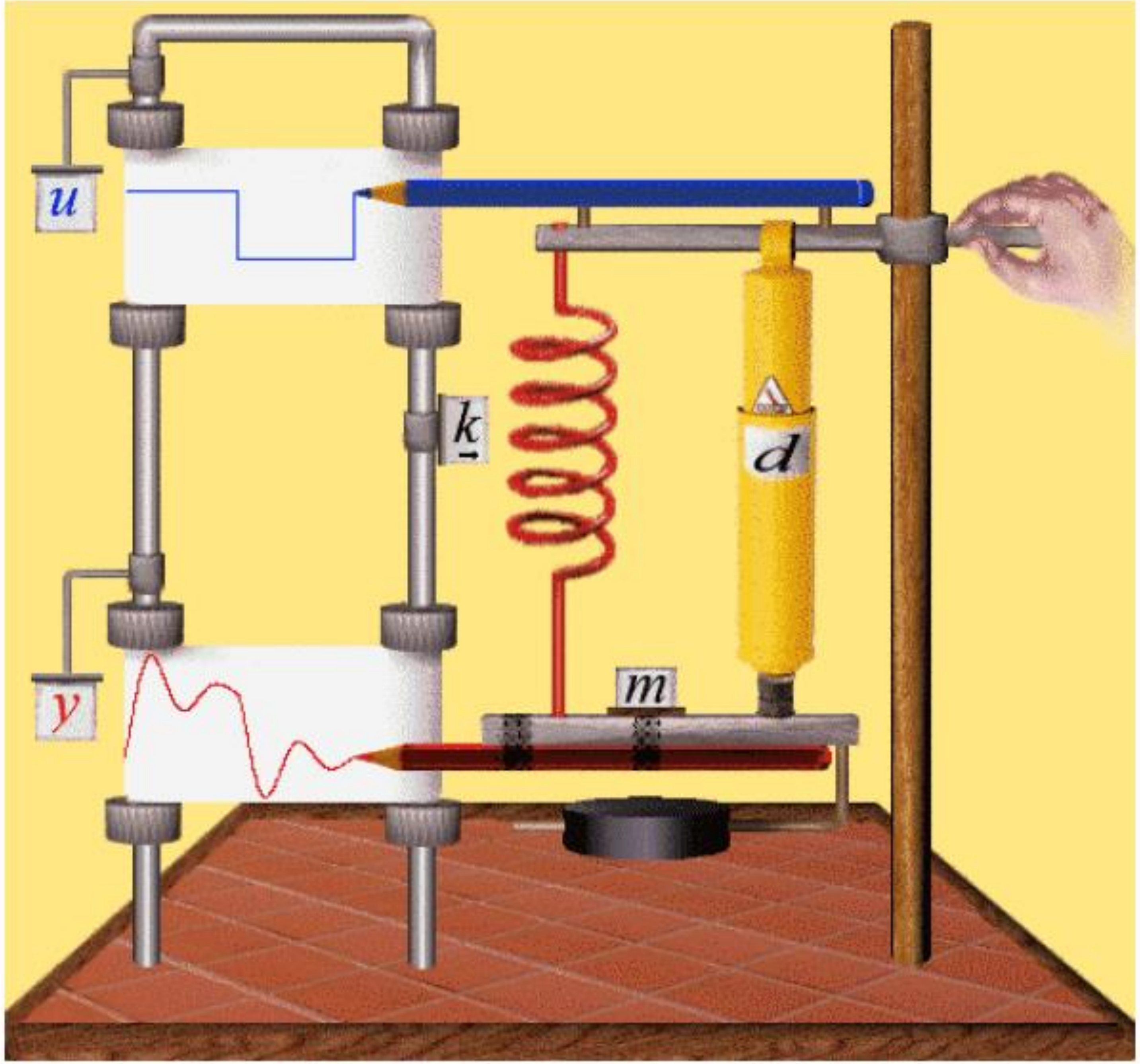
$Y(s)=G(s).1/s$

Prechodová funkcia je odozva systému na jednotkový skok.

Graf prechodovej funkcie sa nazýva prechodová charakteristika.

Vstup

Skok



Výstup

Prechodová charakteristika PCH

Příklad 3.9: Určete přechodovou funkci regulačního členu s přenosem

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Řešení: Podle vztahu (3.25) je přechodová funkce

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{6s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{6(s+3)}\right\} =$$

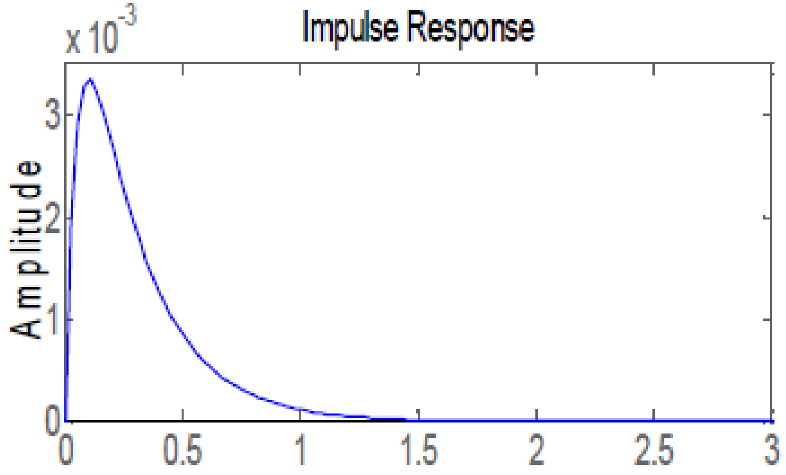
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

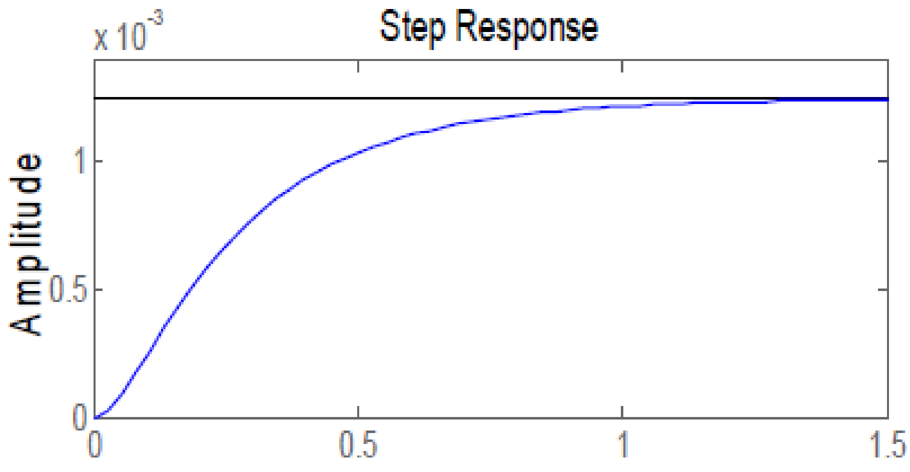
MATLAB: Prenosová funkcia, impulzná a prechodová charakteristika

```
>> G1=tf([0.1],[1 24 80])   % zadanie prenosovej funkcie

Transfer function:
     0.1
---------------
s^2 + 24 s + 80

>> impulse(G1)        % vykreslenie impulznej funkcie
>> step(G1)           % vykreslenie impulznej funkcie
```



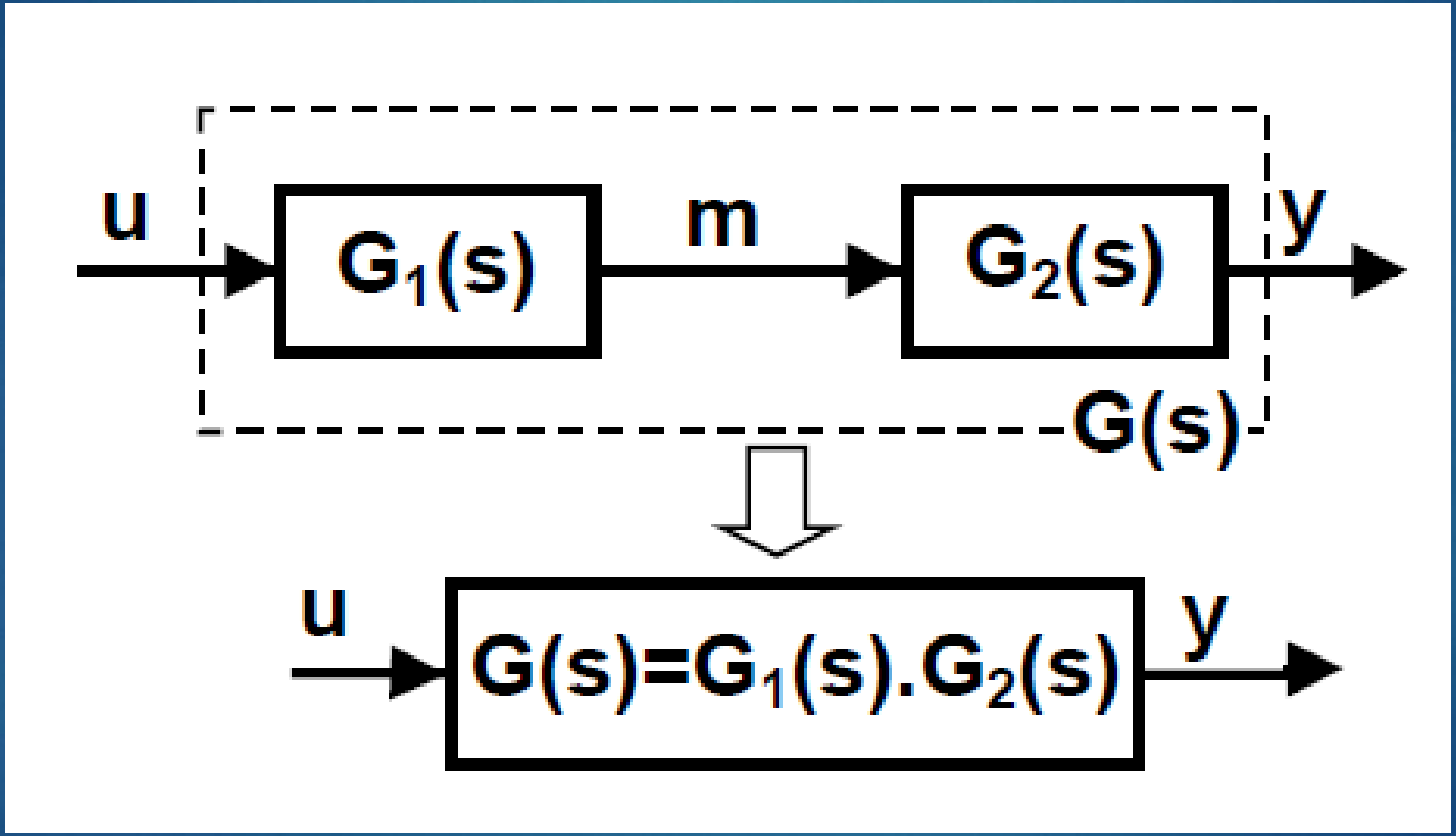


Bloková algebra

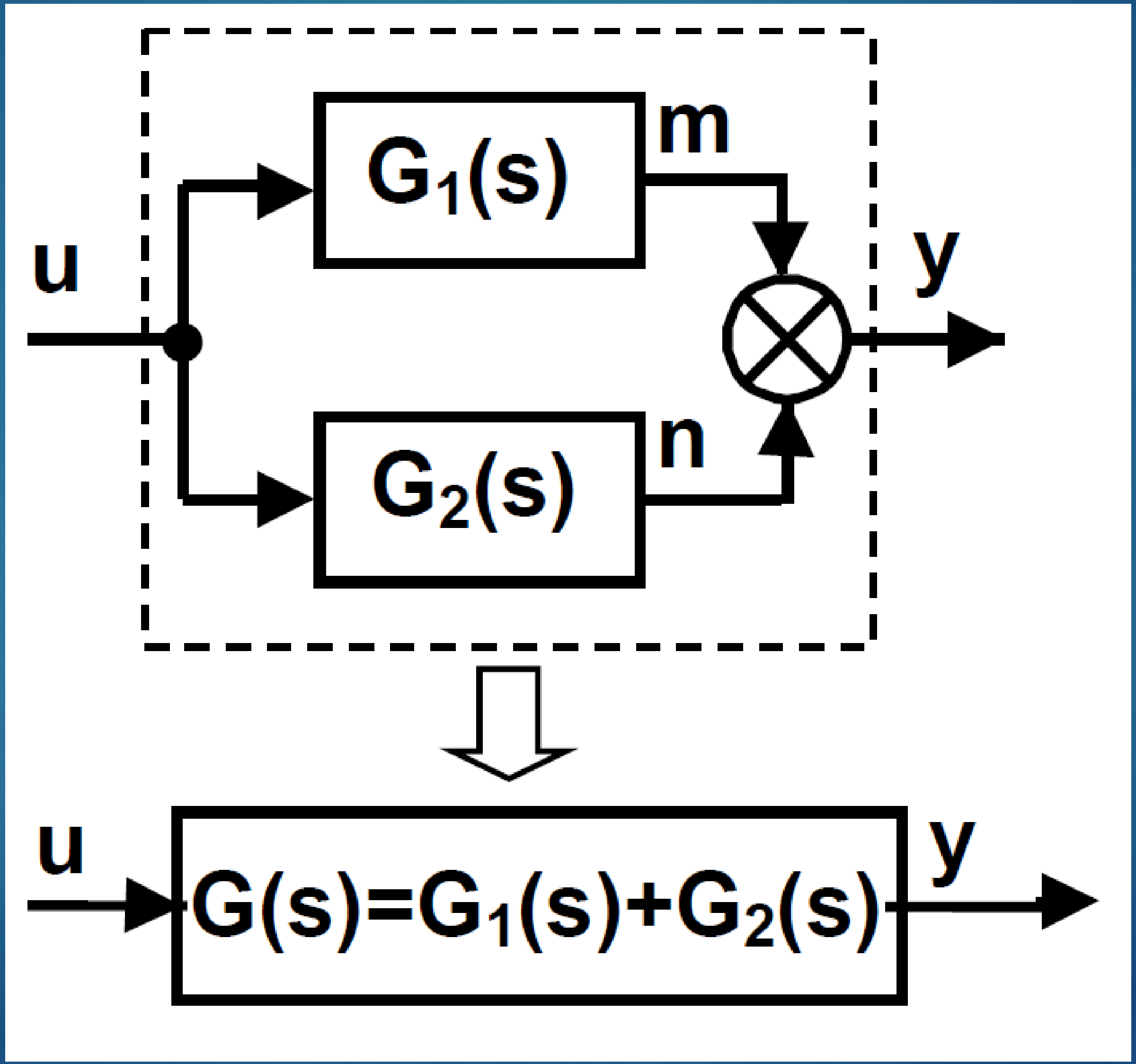
ERIK KUČERA

ANALÝZA A INFORMATIZÁCIA DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV | PREDNÁŠKA 3

Sériové zapojenie

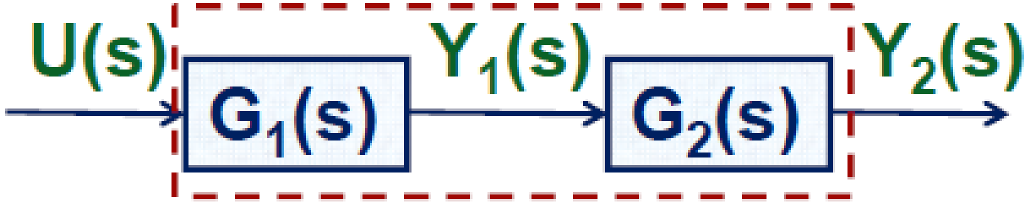


Paralelné zapojenie



Ako spájať „bloky“ – prenosové funkcie? (algebra prenosov)

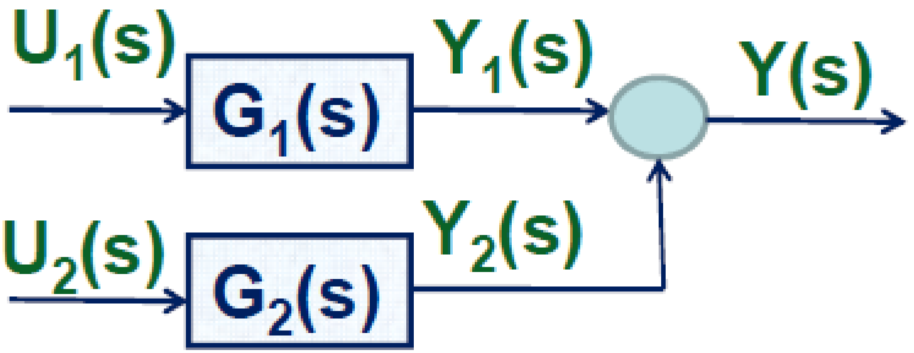
• Sériové zapojenie:



$$Y_1(s) = G_1(s)\,U(s)$$
$$Y_2(s) = G_2(s)\,Y_1(s)$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_2(s) &= G(s)\,U(s) \\ G(s) &= G_2(s)\,G_1(s) \end{aligned}}$$

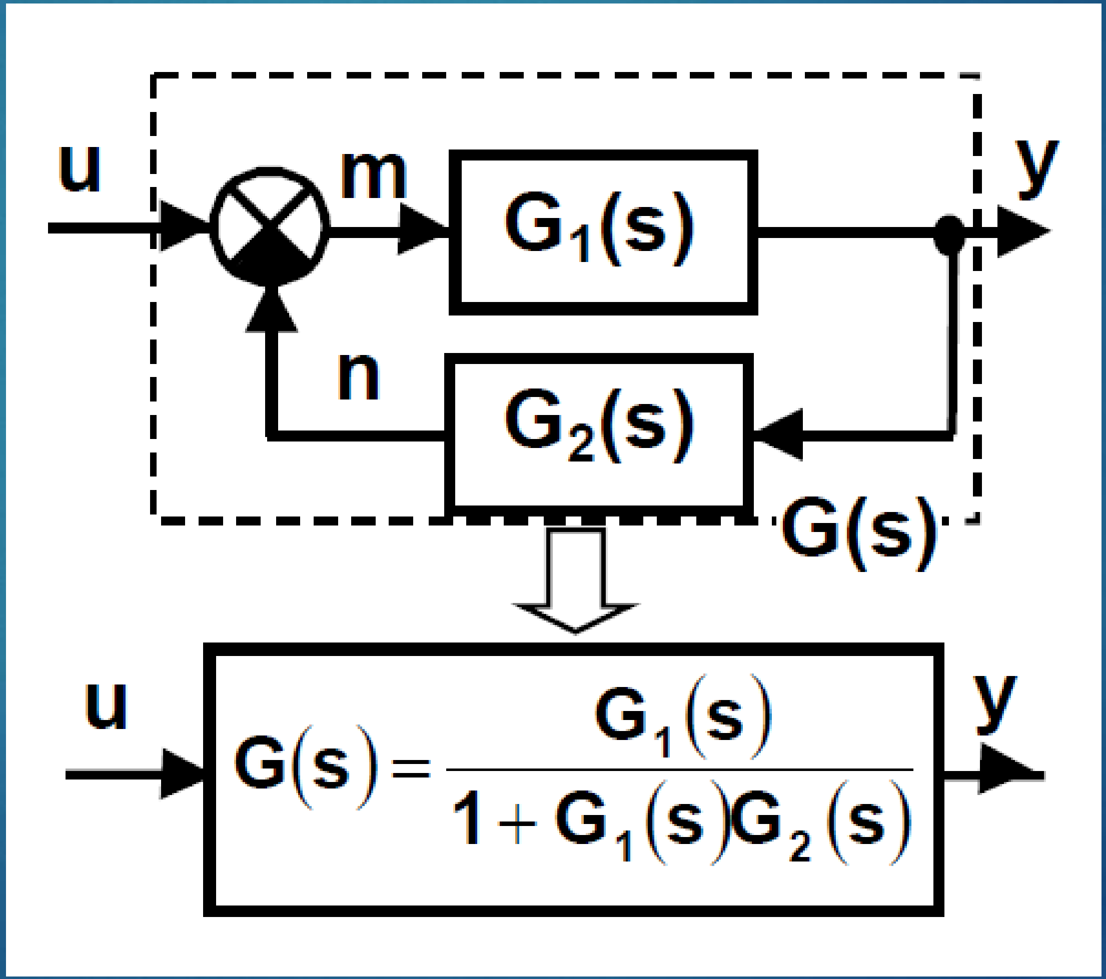
• Paralelné zapojenie:



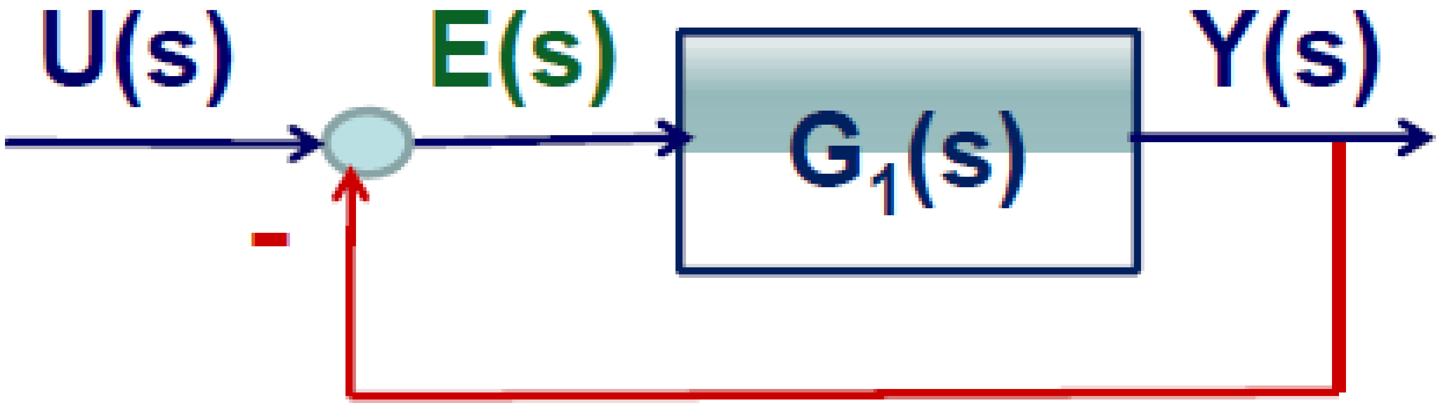
$$Y(s) = Y_1(s)+Y_2(s)$$

$$\boxed{Y(s) = G_1(s)\,U_1(s) + G_2(s)\,U_2(s)}$$

Antiparalelné (spätnoväzobné) zapojenie



• Antiparalelné zapojenie:



$$Y(s) = G_1(s)\,E(s)$$

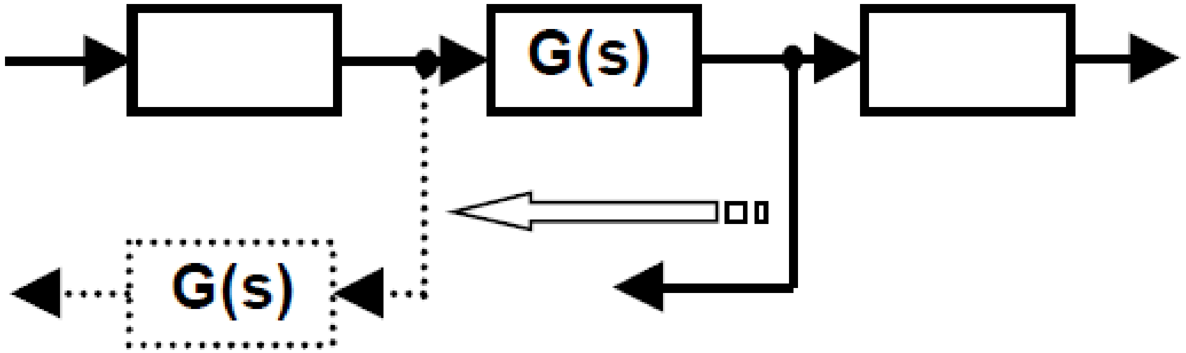
$$E(s) = U(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = G_1(s)\,(U(s) - Y(s))$$

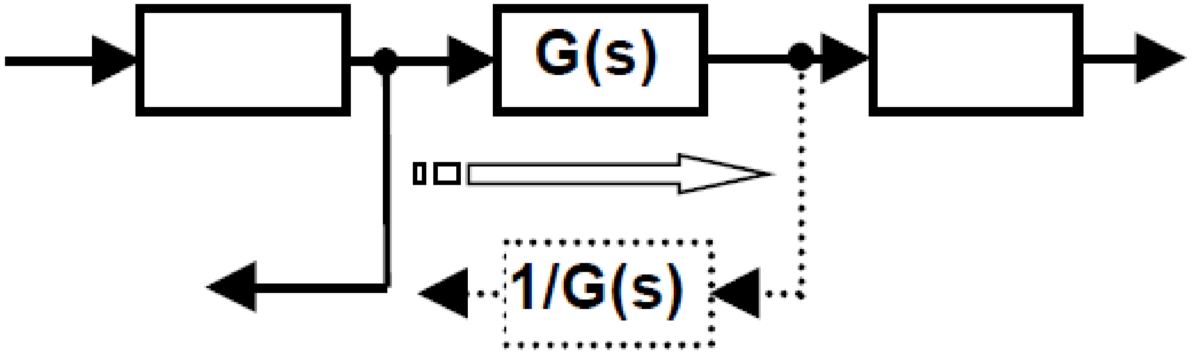
$$\boxed{Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} U(s)}$$

Poznámka: V dalším si spočítáme příklady na blokovou algebru, kdy hledáme výsledný přenos složitějších systémů. Jedná se jednak o příklady, kdy postupným zjednodušováním schématu se dostaneme k cíli. Vedle toho to jsou příklady tzv. **překřížených vazeb**, kdy musíme některé vazby změnit, abychom určili typ zapojení a stanovili přenos.

Jedná se o přemístění místa rozvětvení. Přemisťujeme-li podle obr. 3.36 bod rozvětvení proti směru signálu, potom musíme do přemisťované větve zapojit člen s přenosem, který je mezi původním a novým bodem rozvětvení.



Obr. 3.36



Obr. 3.37

Přemisťujeme-li bod rozvětvení ve směru signálu, zapojíme tam člen o přenosu rovný převratné hodnotě přenosu mezi původním a novým bodem rozvětvení – obr. 3.37.

Zdroje

- Materiály k prednáškam a cvičeniam – Danica Rosinová, Alena Kozáková