Analýza a informatizácia dynamických systémov

ERIK KUČERA | 3APIN

Modelovanie, diferenciálne rovnice, Laplaceova transformácia

ERIK KUČERA

ANALÝZA A INFORMATIZÁCIA DYNAMICKÝCH SYSTÉMOV | PREDNÁŠKA 2

Modelovanie – motivácia (načo?)

Ak chceme študovať a poznať chovanie reálneho mechatronického systému potrebujeme jeho *model*

***Cieľ modelovania*: náhrada skúmaného systému jeho modelom, teda systémom, ktorý aproximuje jeho chovanie**

Model určitého systému alebo objektu vyjadruje a zahŕňa jeho charakteristické, podstatné vlastnosti

Matematický model - taký abstraktný model skúmaného systému, ktorý na opis chovania sa systému využíva matematické relácie a vzťahy.

***Využitie matematických modelov*: pri skúmaní vlastností systémov, návrhu ich riadenia a simuláciu ich chovania, v prírodných vedách, inžinierskej priemyselnej praxi, mechanike, elektrotechnike, riadení procesov, ale aj v sociálnych vedách, ekonomike, sociológii a pod.**

Simulácia

Definícia simulácie: (*Shannon):*

Simulácia je proces tvorby – spresňovania modelu reálneho skúmaného systému a realizácia experimentov s týmto modelom za účelom dosiahnutia lepšieho pochopenia chovania a činnosti skúmaného systému a za účelom posúdenia rôznych variantov činnosti systému.

***Simulácia* je napodobňovanie činnosti skúmaného systému v čase, pričom *vývoj chovania* systému je skúmaný pomocou *simulačného modelu*.**

Modelovanie dynamického systému

Modely (***ako modelujeme***):

- matematické (analytické, numerické)
- fyzikálne

Modely (***čo modelujeme***):

- komponentov (dif. rovnice, iné vstupno-výstupné opisy)
- väzieb (tabuľka, matica, graf)
- relevantných procesov a javov (rozhodovacie procesy,...)

Pri modelovaní sú dve základné protichodné tendencie:

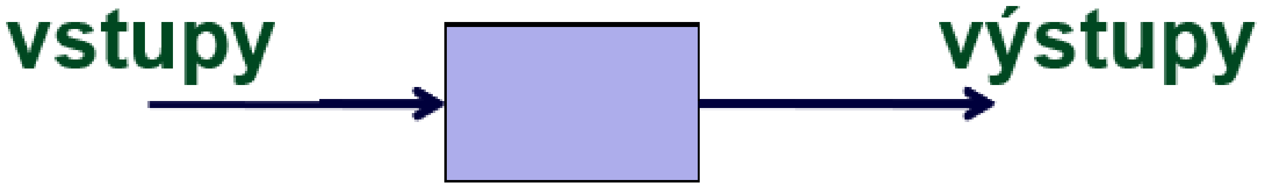
maximálna presnosť	$\Leftrightarrow$	čo najjednoduchší opis
kvalita		riešiteľnosť, spoľahlivosť

? Ako nájsť vhodný kompromis?

Zásady tvorby modelu (dynamického) systému

1. Jasne definovaný ***účel*** vytvárania modelu – **CIEĽ.**
2. Musí byť definované ***rozhranie*** medzi systémom a okolím.
3. Musí byť definovaný ***štrukturálny vzťah medzi*** jednotlivými ***komponentami*** systému.
4. Musia byť definované ***premenné*** - z fyzikálnej podstaty syst.
5. Treba nájsť ***vzťahy*** (***rovnice)***, opisujúce ***fyzikálne chovanie*** komponentov systému (elementárne rovnice).
6. Elementárne rovnice komponentov (podsystémov) systému treba dať ***do súvislostí*** prostredníctvom fyzikálnych princípov kontinuity, kompatibility – Newtonove zák., Kirchhoffove zák.,...
7. Získané rovnice treba upraviť, ***zjednodušiť***, aby sme získali konečný (výsledný) matematický model.
8. Skúška ***validity*** modelu – porovnanie vlastností reálneho systému a jeho matematického opisu.

- **Dynamický systém**



- **Modelovanie:**

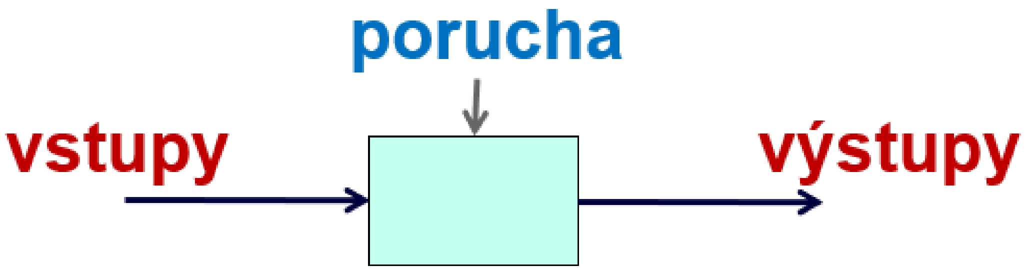
matematická (resp. fyzikálna, počítačová...) reprezentácia správania sa dynamického systému (opis vzťahmi vstup-výstup)

„black box“, „grey box“, „white box“

- **Riadenie DS :**

cieľavedomá činnosť – také pôsobenie na vstupné veličiny systému, aby sme dosiahli žiadané chovanie sa systému (jeho výstupných veličín)

Dynamický systém – opis, model



Vstupy: premenné, ktoré priamo ovplyvňujú pochody v modelovanom a riadenom procese a ktorými môžeme proces cielene ovplyvňovať (riadiť)

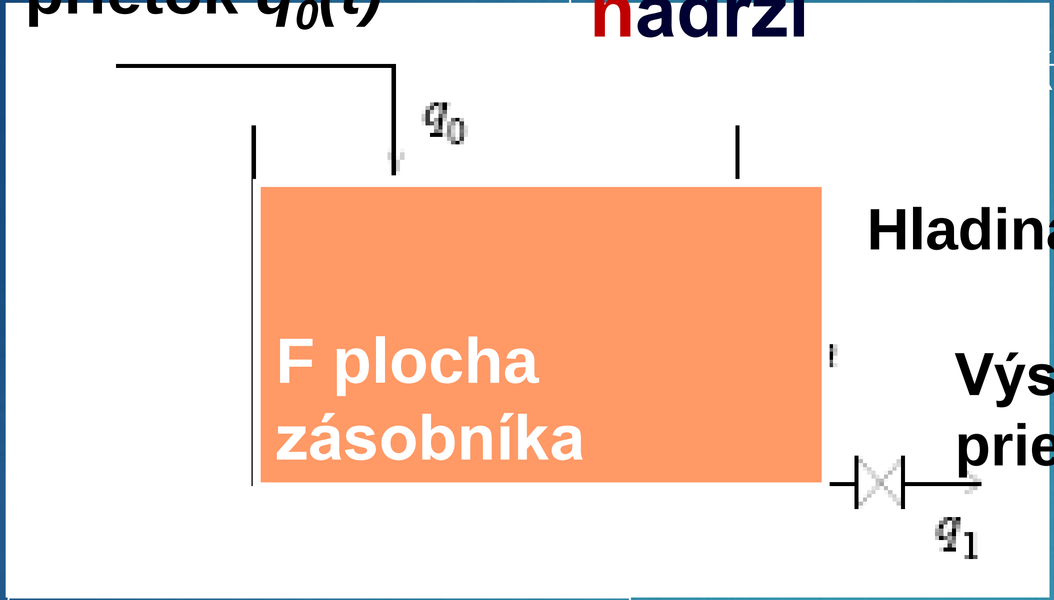
Poruchy: premenné - vstupy do procesu, ktoré ovplyvňujú pochody v procese, ale my ich nevieme cielene ovplyvniť

Výstupy: premenné, ktoré môžeme priamo merať a ktorých chovanie je výsledkom pôsobenia zmien vstupov (riadiacich vstupov) a porúch

Príklady DS:

Vstupný prietok $q_0(t)$

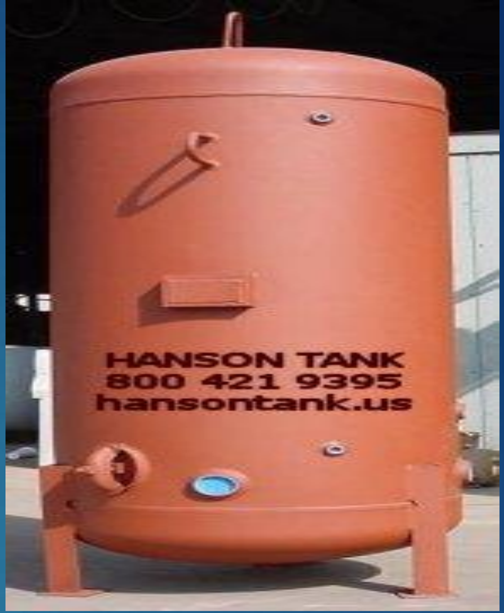
Výška hladiny v nádrži



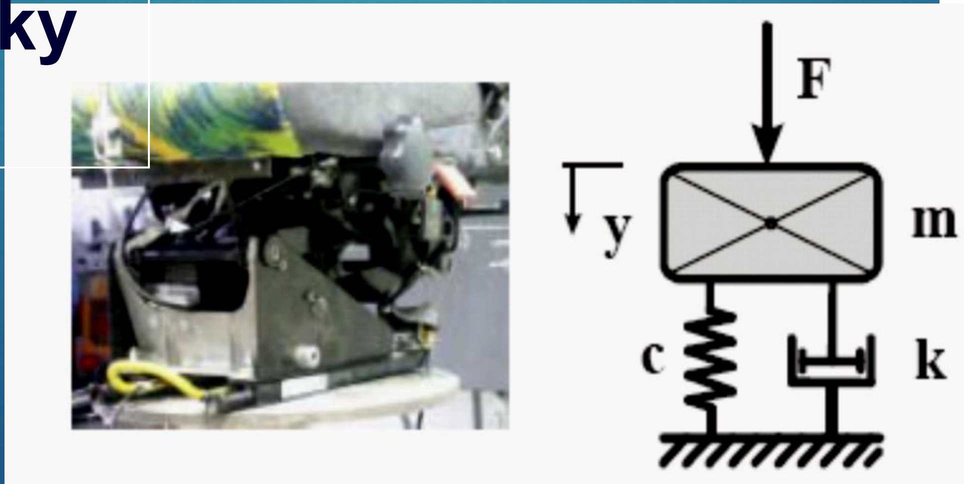
F plocha zásobníka

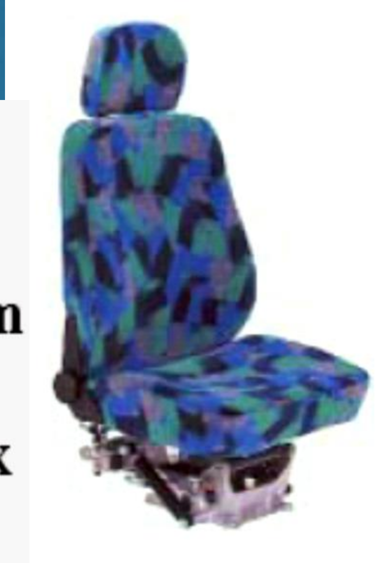
Hladina $h(t)$

Výstupný prietok

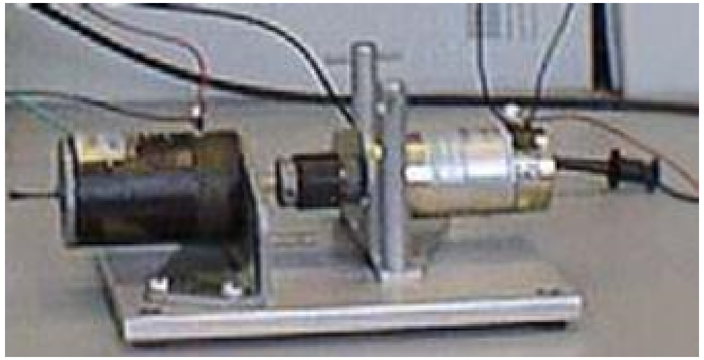


Model sedačky vodiča

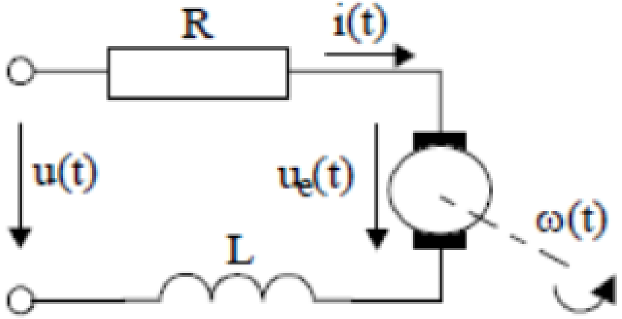




Otáčky jednosmerného motora

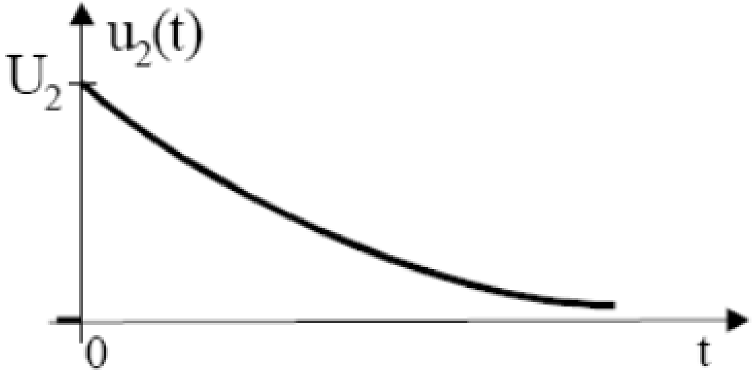


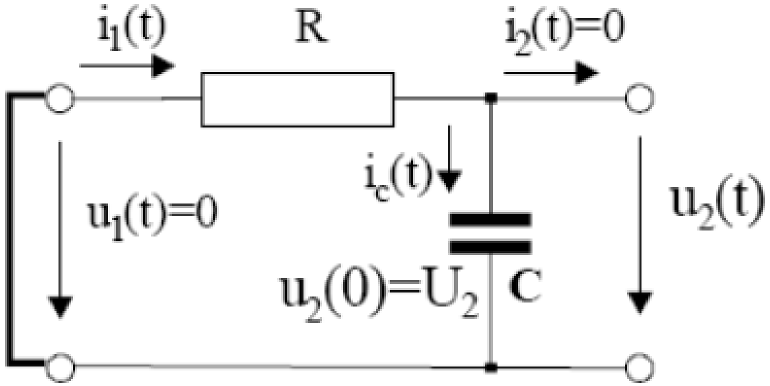
Vstup: napätie



Výstup: otáčky

RLC obvod





Modelovanie dynamického systému (aký model?)

• Dynamický systém (DS)↔protiklad je statický systém: systém, v ktorom sledujeme chovanie v závislosti od času

Ustálený stav → statický model, vzťah vstup→výstup: ?

Prechodový dej → dynamický model, vzťah vstup→výstup: ?

Statický a dynamický model DS - príklad

Nádrž: vstup=prietok $Q_1 \rightarrow$ DS $\rightarrow$ výstup=hladina h

ustálené stavy – statický model (prevodová charakteristika)

vstup (číslo) → výstup (číslo)

$$Q_1 \longrightarrow h$$

Prevodová charakteristika je závislosť výstupu od vstupu v ustálenom stave.

prechodový dej – dynamický model

(prechodová funkcia, jej graf je prechodová charakteristika)

$$\boxed{S\frac{dh}{dt} = Q_1 - \mu S_0\sqrt{2gh}}$$

vstup (funkcia času) → výstup (funkcia času)

Prechodová funkcia je časový priebeh odozvy systému na skokovú zmenu vstupnej hodnoty (graf zobrazenie = prechodová charakteristika).

Modelovanie dynamického systému
(statický a dynamický model)

• Dynamický systém (DS)↔modelovanie v ustálenom stave (statickom režime) aj v prechodnom (dynamickom) režime

Ustálený stav → statický model, vzťah vstup→výstup:

(nelineárna) **algebraická rovnica**

(**prevodová charakteristika**)

(vstupný prietok – výška hladiny)

Prechodový dej → dynamický model, vzťah vstup→výstup:

(nelineárna) **diferenciálna rovnica**

(**prechodová char., frekvenčná char.**)

(zmena vstupného prietoku – priebeh zmeny výšky hladiny)

(prechod medzi ustálenými stavmi)

• **Dynamický systém (DS)**(↔ protiklad je statický systém): systém, v ktorom sledujeme chovanie v závislosti od času

Ustálený stav: vzťah vstup→výstup:

(nelineárna) (algebraická) rovnica

prevodová charakteristika

(napr.: vstupný prietok – výška hladiny)

Prechodový dej: vzťah vstup→výstup:

(nelineárna) diferenciálna rovnica

(prechodová char., frekvenčná char.)

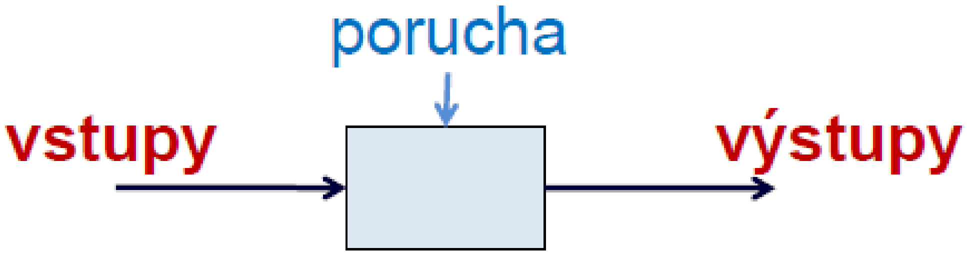
(napr.: zmena vstupného prietoku – priebeh zmeny výšky hladiny)

(napr.: prechod medzi ustálenými stavmi)

Lineárny dynamický systém (LDS):

lineárna diferenciálna rovnica

Dynamický systém – opis, model



Vstupy: premenné, ktoré priamo ovplyvňujú pochody v modelovanom a riadenom procese a ktorými môžeme proces cielene ovplyvňovať (riadiť)

Poruchy: premenné - vstupy do procesu, ktoré ovplyvňujú pochody v procese, ale my ich nevieme cielene ovplyvniť

Výstupy: premenné, ktoré môžeme priamo merať a ktorých chovanie je výsledkom pôsobenia zmien vstupov (riadiacich vstupov) a porúch

Vnútorné premenné: premenné, ktoré reprezentujú chovanie sa procesu vo vnútri systému (**stavové premenné**)

Nádrž: vstup=prietok $Q_1 \rightarrow$ $\rightarrow$ výstup=hladina h

ustálené stavy: prevodová char.

vstup (číslo) → výstup (číslo)

Prevodová charakteristika je závislosť výstupu od vstupu v ustálenom stave.

volá me ju tiež **statická** charakteristika

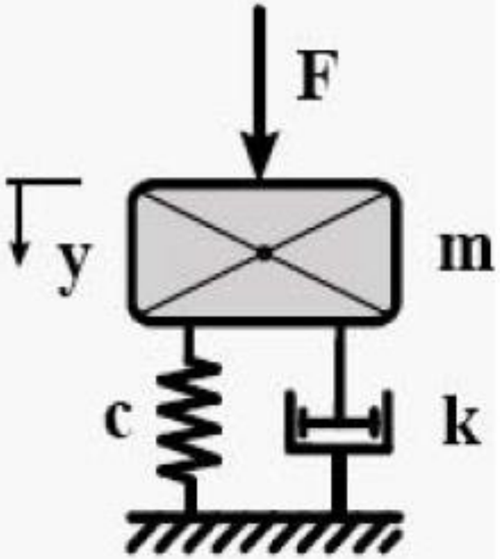
$$\boxed{S\frac{dh}{dt} = Q_1 - \mu S_0\sqrt{2gh}}$$

prechodový dej:

vstup (funkcia času, napr. konštanta) → výstup (funkcia času)

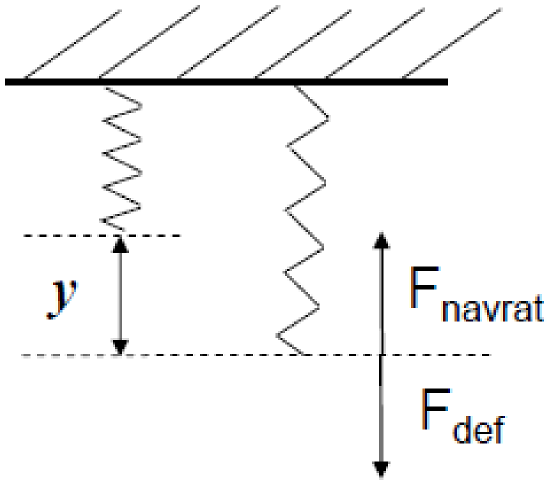
Prechodová charakteristika je časový priebeh odozvy systému na skokovú zmenu vstupnej hodnoty.

• Príklad DS2: systém pružina - tlmič



analógie systému pružina – tlmič: napr. tlmič kolesa (aj aktívne tlmenie)

Pružina - model



ak deformačnou silou natiahneme pružinu o vzdialenosť Δy, bude na ňu pôsobiť **návratová sila v opačnom smere**

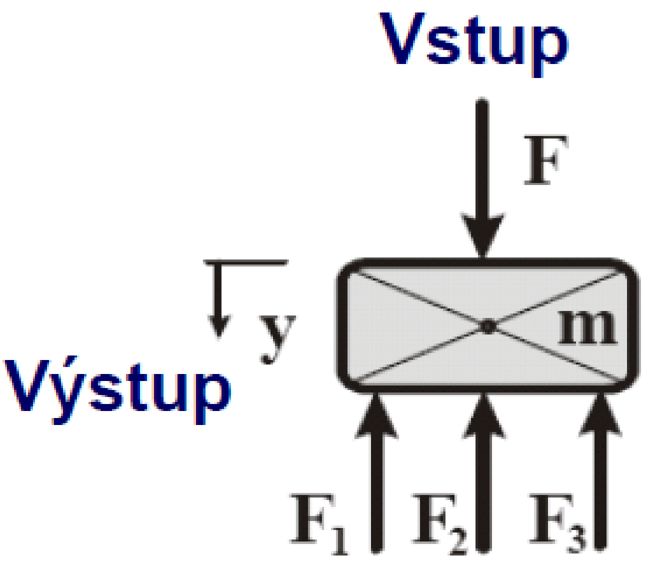
$$\boxed{F_{navrat} = -k\, y}$$

F_{def} deformačná sila [N]
y predĺženie pružiny [m]
k tuhosť pružiny $[Nm^{-1}]$

Tlmič - model

ak pri kmitaní telesa pôsobí mechanický odpor, **tlmenie** môže byť matematicky **modelované ako sila synchrónna s rýchlosťou telesa**, ale pôsobiaca opačným smerom

$$\boxed{F_{tlm} = -c\, v = -c\frac{dy}{dt} = -cy'}$$



$F = m_2 \,.\, g$	váha vodiča
$F_1 = - k \,.\, y$	reakcia pružiny
$F_2 = -c \dfrac{dy}{dt}$	reakcia tlmiča
$F_3 = -m \dfrac{d^2 y}{dt^2}$	zotrvačný odpor

$$F_1 + F_2 + F_3 + F = 0$$

m_1 = 20 kg, m_2 = 80 kg
g = 10 m/s^2
k= 8 . 10^3 N/m
c = 2.4 . 10^3 Ns/m

$$\boxed{m \,.\, y'' + c \,.\, y' + k \,.\, y = F}$$

$$\boxed{100 \,.\, y'' + 2400 \,.\, y' + 8000 \,.\, y = F}$$

$$F = m_2 \,.\, g = 80 \,.\, 10 = 800 \text{ N}$$

$$m = m_1 + m_2 = 20 + 80 = 100 \text{ kg}$$

Ustálený stav:

$8000 \,.\, y = F$

Riešenie DR??

- **Model dynamického systému** (matematický):

diferenciálna rovnica → riešenie ?!

Obyčajná diferenciálna rovnica (DR) n-tého rádu

(nádrž: 1.rádu $\boxed{S\frac{dh}{dt} = Q_1 - \mu S_0\sqrt{2gh}}$ **)**

všeobecne:

$$\boxed{x^{(n)}(t) = f[t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)]}$$ **(explicitný tvar)**

$$F[t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t)] = 0$$ (implicitný tvar)

Riešenie DR

- všeobecné $x = x(t; c_1, \ldots, c_n)$
- partikulárne

Riešením DR je funkcia !!

Okrajová úloha – na určenie *n* konštánt $(c_1,\dots,c_n)$ je daných **n** *okrajových* podmienok

Cauchyho úloha – na určenie *n* konštánt $(c_1,\dots,c_n)$ je daných **n** *počiatočných* podmienok:

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0,\ \dots,\ \ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

- dosadíme ich do pravých strán všeobecného riešenia a jeho derivácií → partikulárne riešenie (t.j. konkrétne hodnoty $\mathbf{c_1,\dots,c_n}$).

Riešenie nelineárnej DR: analyticky len špeciálne prípady; numericky – napr. metódy Runge Kutta (Matlab: ode45)

Lineárna diferenciálna rovnica (LDR)

$$\boxed{x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)\dot{x} + p_n x = q(t)}$$

$q(t) = 0$ LDR bez pravej strany

$q(t) \neq 0$ LDR s pravou stranou

Fundamentálny systém - n lineárne nezávislých riešení DR bez pravej strany (fundamentálne riešenia)

Riešenie LDR s pravou stranou:

1. riešime LDR bez pravej strany (fundamentálne riešenia)

2. nájdeme ľubovoľné partikulárne riešenie

Výsledné riešenie: súčet výsledkov z bodov 1 a 2

Lineárna DR (LDR) s konštantnými koeficientami

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = q(t)$$

$$a_i \in R; \quad a_i = konst. \;\; pre \;\; i = 1, \ldots, n$$

nádrž: $\boxed{S\dfrac{d\Delta h}{dt} + c\Delta h = \Delta Q_1}$

pružina-tlmič: $\boxed{100 \,.\, y'' + 2400 \,.\, y' + 8000 \,.\, y = F}$

Analytické riešenie LDR s konštantnými koeficientami:

1. **fundamentálne riešenia (lineárne nezávislé)- pomocou *charakteristickej rovnice***
2. **pre niektoré špeciálne typy pravej strany $\boxed{q(t)}$ poznáme všeobecný tvar partikulárneho riešenia, dourčíme konštanty**

Dôležitá poznámka k riešeniu lineárnej DR:

Pri riešení DR bez pravej strany sa využíva

Linearita: **- princíp superpozície**
- homogenita (násobenie konštantou)

teda ...

(Zaručená je existencia a jednoznačnosť riešení...)

1. Hľadanie fundamentálnych riešení z charakteristickej rovnice (ChR)

$$\underbrace{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}_{} = 0$$

charakteristický polynóm – má vždy n koreňov (riešenia ChR)

a) ChR má n navzájom rôznych riešení $s_i,\ i = 1,\ldots,n$

fundamentálne riešenia (módy) sú: $e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \ldots, e^{s_n t}$

b) pre k-násobný koreň ChR bude k lineárne nezávislých riešení: $e^{s_i t}, te^{s_i t}, \ldots, t^{k-1} e^{s_i t}$

c) pre dvojicu komplexne združených koreňov ChR:

$$s_{1,2} = \alpha \pm i\beta \longrightarrow \quad e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t \pm i \sin \beta t)$$

Eulerov vzťah

$$\longrightarrow \quad \boxed{e^{\alpha t}(c' \cos \beta t + c'' \sin \beta t)}$$

2. Hľadanie partikulárneho riešenia $\psi(t)$

pre špeciálny typ pravej strany $\boxed{q(t) = e^{\alpha t} P_n(t)}$

$$\boxed{\psi(t) = t^k e^{\alpha t} Q_n(t)}$$

k je násobnosť koreňa α v ChR)

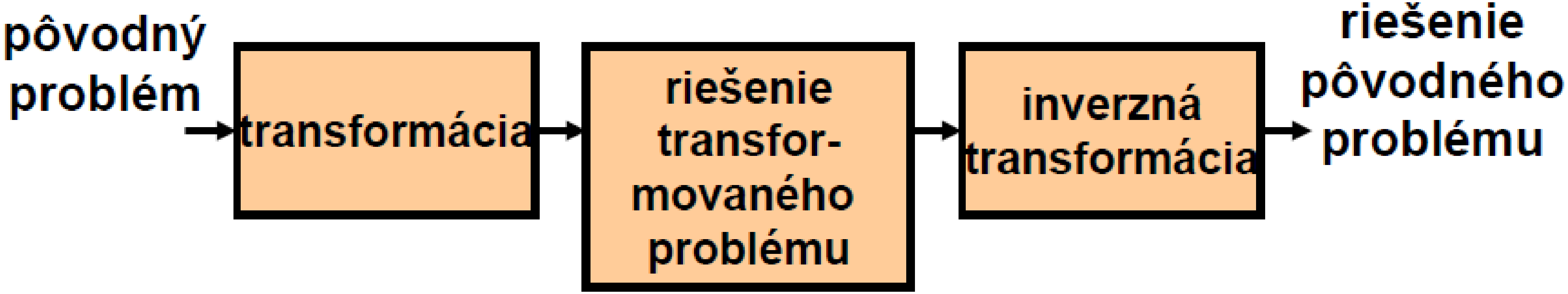
$\psi(t)$ musí spĺňať vyhovovať DR – dosadíme ho teda do DR a použitím *metódy neurčitých koeficientov* určíme koeficienty polynómu $\mathbf{Q_n(t)}$:

$$Q_n(t) = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \ldots + A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

Pojem transformácie

- Transformácia: (matematická) konverzia problému z jednej oblasti do inej tak, aby sa riešenie problému uľahčilo

  (u nás: dif. rovnica → algebraická rovnica)



- Príklady transformácií:
  - Laplaceova transformácia (integrálna)
  - Fourierova
  - z-transformácia
  - wavelets (vlnková transformácia)

Laplaceova transformácia - definícia

$$\mathbf{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

problém v časovej oblasti: diferenciálna rovnica

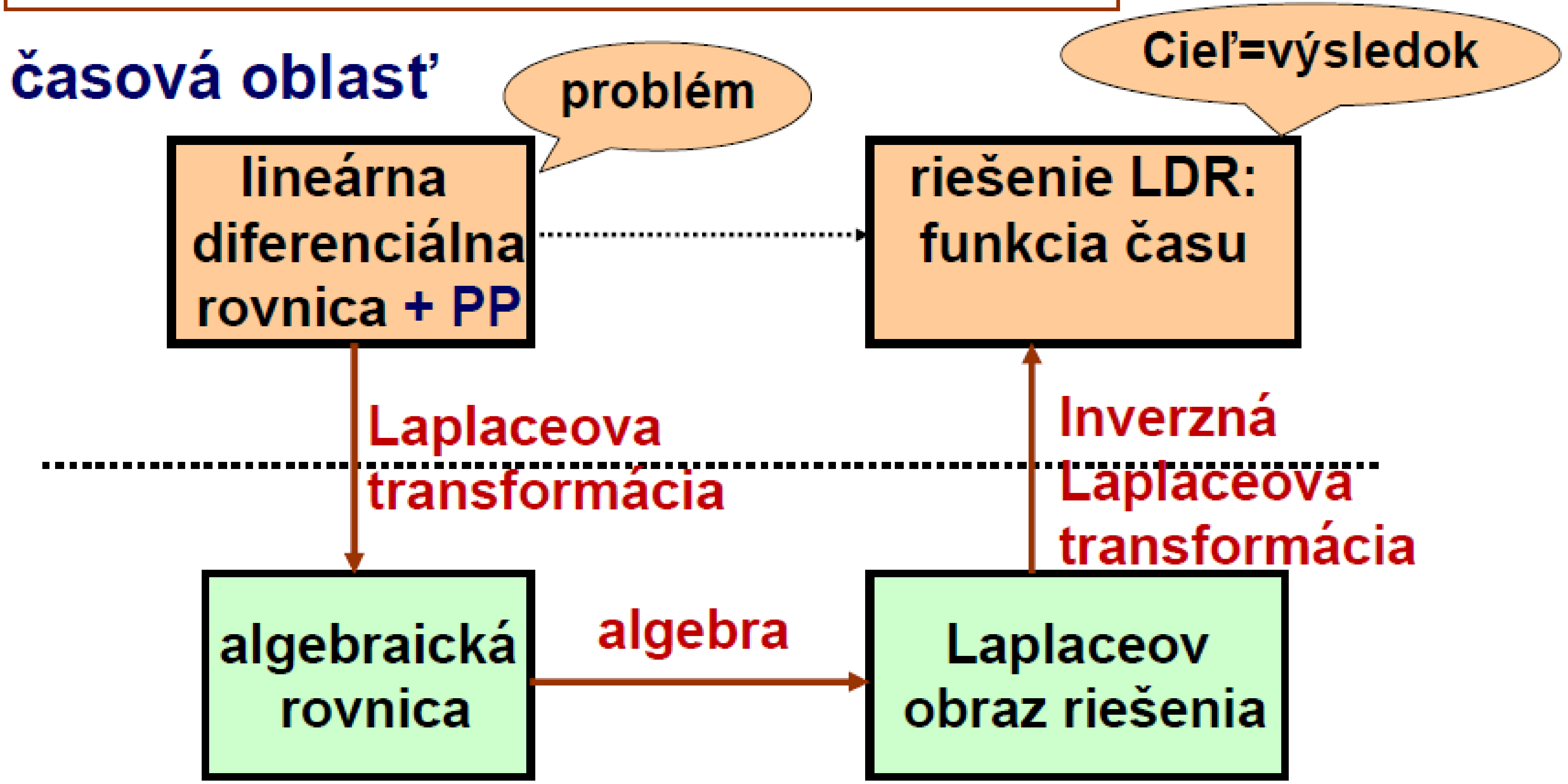
riešenie v časovej oblasti: funkcia (času)

Laplaceova transformácia → **riešenie v s-oblasti** → **Inverzná Laplaceova transformácia**

Pre aké funkcie je definovaná Laplaceova transf.:

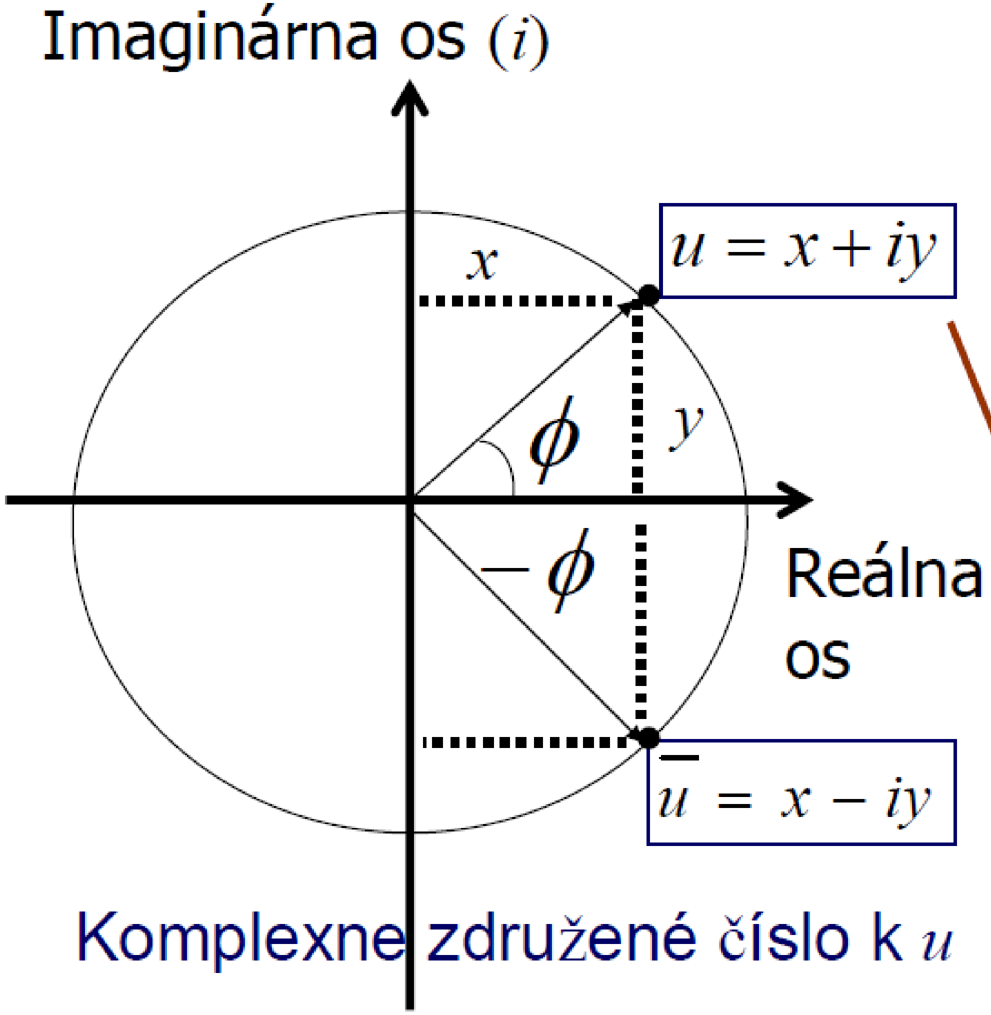
1. $f(t) = 0$ pre $t < 0$, $f(t)$ **je po častiach spojitá**
2. existujú konštanty $M > 0, \alpha \geq 0$ také že $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$

Laplaceova transformácia - použitie

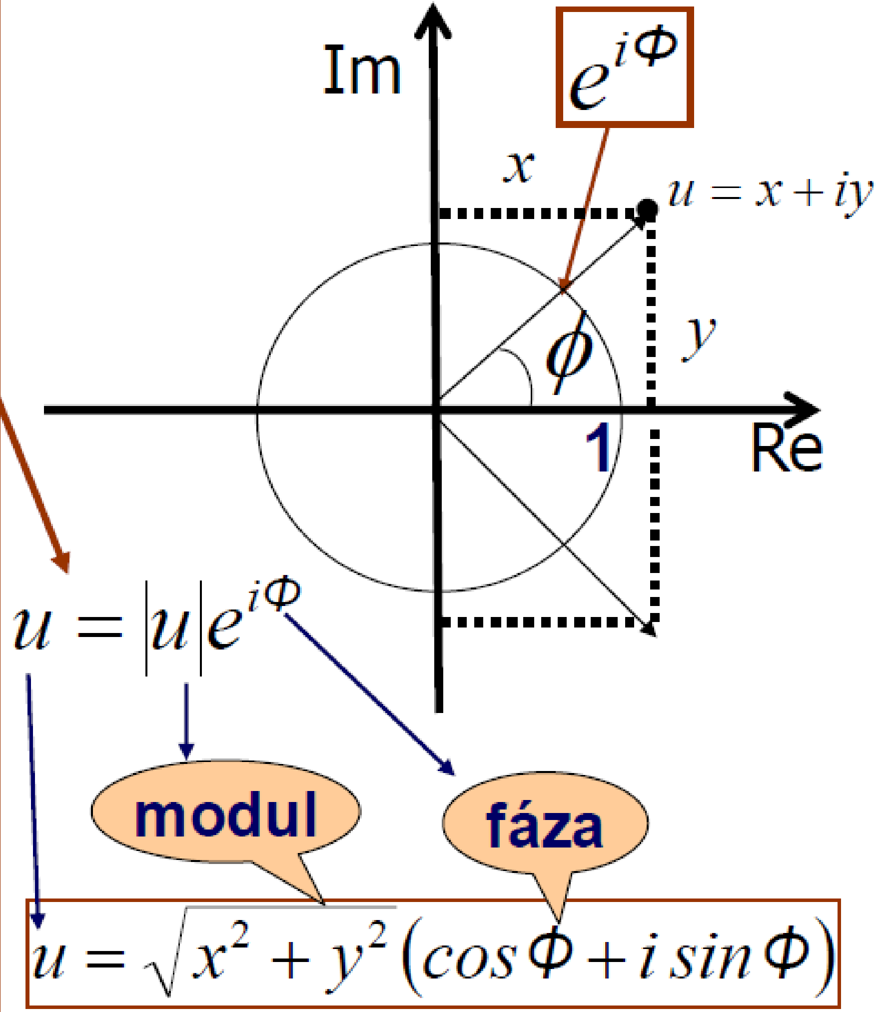


Laplaceova oblasť = **frekvenčná oblasť** (komplexné čísla)

Komplexné čísla – komplexná rovina



Goniometrický tvar komplexného čísla:



Základné vlastnosti Laplaceovej transformácie I

Linearita – princíp superpozície

$$\mathbf{L}[a_1 f(t) + a_1 f(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

Obraz derivácie

$$\mathbf{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0+)$$

Obraz integrálu

$$\mathbf{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Posunutie v čase

$$\mathbf{L}[f(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s)$$

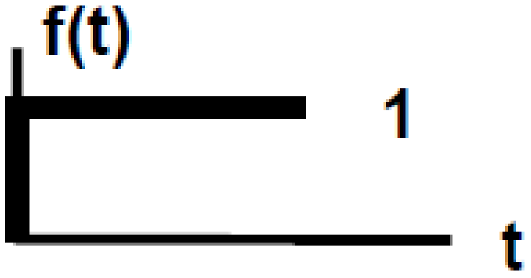
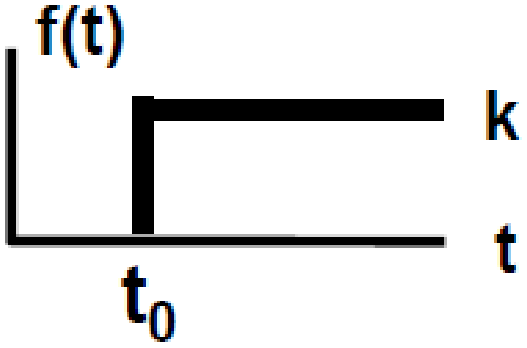
Konvolúcia

$$\mathbf{L}\left[\underbrace{\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau}_{}\right] = F_1(s) F_2(s)$$

konvolutórny súčin funkcií $f_1(t)$, $f_2(t)$

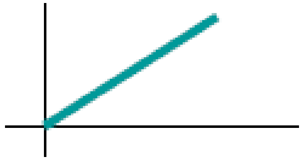
Laplaceova transformácia základných typov signálov (funkcií) I

(uvažujeme signály, kde: $f(t) = 0$ pre $t < 0$)

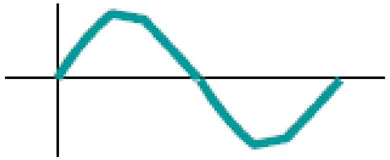
	signál		Laplaceov obraz
	jednotkový skok: $\boxed{1(t)}$	$\longrightarrow$	$\boxed{\frac{1}{s}}$
	skok v čase t_0: $\boxed{k(t-t_0)}$	$\longrightarrow$	$\boxed{\frac{k.e^{-st_0}}{s}}$
	exponenciálna funkcia: $\boxed{e^{-at}}$	$\longrightarrow$	$\boxed{\frac{1}{s+a}}$

Laplaceova transformácia základných typov signálov (funkcií) II

rampa: $t \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{s^2}}$



$sin(t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{\varpi}{s^2+\varpi^2}}$



$cos(t) \longrightarrow \boxed{\dfrac{s}{s^2+\varpi^2}}$

$e^{-at}\sin\varpi t \longrightarrow \boxed{\dfrac{\varpi}{(s+a)^2+\varpi^2}}$

$e^{-at}\cos\varpi t \longrightarrow \boxed{\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\varpi^2}}$

Laplaceova transformácia základných typov signálov – Diracov impulz

Diracov impulz (nie je funkcia, ale vieme s ním narábať) – výhodný nástroj pre opis a riešenie dynamiky systémov. Je to impulz „nekonečne vysoký a nekonečne úzky“, s jednotkovou plochou (limitný prípad impulzu...)

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & \text{pre } t=0\\ 0 & \text{pre } t\neq 0\end{cases}$$

$\delta(t)$ **je deriváciou jednotkového skoku**

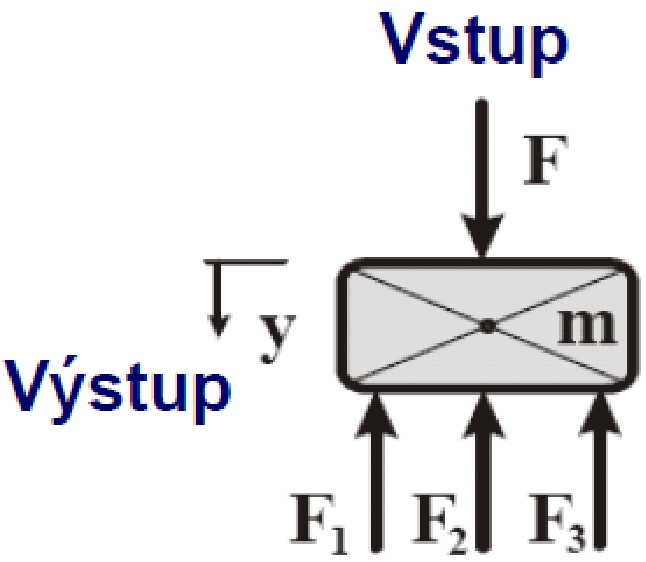
Základné vlastnosti Diracovho impulzu, s ktorými sa pracuje

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)}$$

Laplaceov obraz: $\delta(t) \longrightarrow \boxed{1}$

pozri:
http://controls.engin.umich.edu/wiki/index.php/Dirac_delta_%28impulse%29_function



$F = m_2 \, . \, g$ váha vodiča

$F_1 = - k \, . \, y$ reakcia pružiny

$F_2 = -c \dfrac{dy}{dt}$ reakcia tlmiča

$F_3 = -m \dfrac{d^2 y}{dt^2}$ zotrvačný odpor

$\boldsymbol{F_1 + F_2 + F_3 + F} = 0$

m_1 = 20 kg, m_2 = 80 kg
g = 10 m/s^2
k= 8 . 10^3 N/m
c = 2.4 . 10^3 Ns/m

$$\boxed{m \, . \, y'' + c \, . \, y' + k \, . \, y = F}$$

$$\boxed{100 \, . \, y'' + 2400 \, . \, y' + 8000 \, . \, y = F}$$

$F = m_2 \, . \, g = 80 \, . \, 10 = 800 \text{ N}$

$m = m_1 + m_2 = 20 + 80 = 100 \text{ kg}$

Ustálený stav:
8000 . y = F

Riešenie DR??

LDR a jej riešenie – príklad 1

$$100 \,.\, y'' + 2400 \,.\, y' + 8000 \,.\, y = 800$$ (sedačka)

t.j.:

$$y'' + 24\, y' + 80\, y = 8$$

obraz vstupu

$$[s^2 Y(s) - s\, y(0) - y'(0)] + 24\,[s\,Y(s) - y(0)\,] + 80\,Y(s) = \boxed{\frac{8}{s}}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{8/s}{s^2 + 24s + 80} = \frac{8}{s(s^2 + 24s + 80)}}$$

pre $y(0) = 0$

$y'(0) = 0$

Obraz riešenia

Ako nájsť k obrazu vzor – časovú funkciu $y(t)$??

Inverzná Laplaceova transformácia

Laplaceov obraz $Y(s)$ $\longrightarrow$ $\boxed{y(t) = \mathrm{L}^{-1}\{Y(s)\}}$ vzor: funkcia času $y(t)$ = riešenie LDR

Ako? - Rozklad na parciálne zlomky

$$Y(s) = \frac{8}{s(s^2 + 24s + 80)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+20)} + \frac{C}{(s+4)}$$

Treba určiť A, B, C

$$A(s+20)(s+4) + Bs(s+4) + Cs(s+20) = 8$$

$$s = 0 : A(s+20)(s+4) = 8 \rightarrow A = 0.1$$

$$s = -20 : B\,s\,(s+4) = 8 \rightarrow B = 0.025$$

$$s = -4 : C\,s(s+20) = 8 \rightarrow C = -0.125$$

Prípad, keď CHP má jednoduché reálne korene

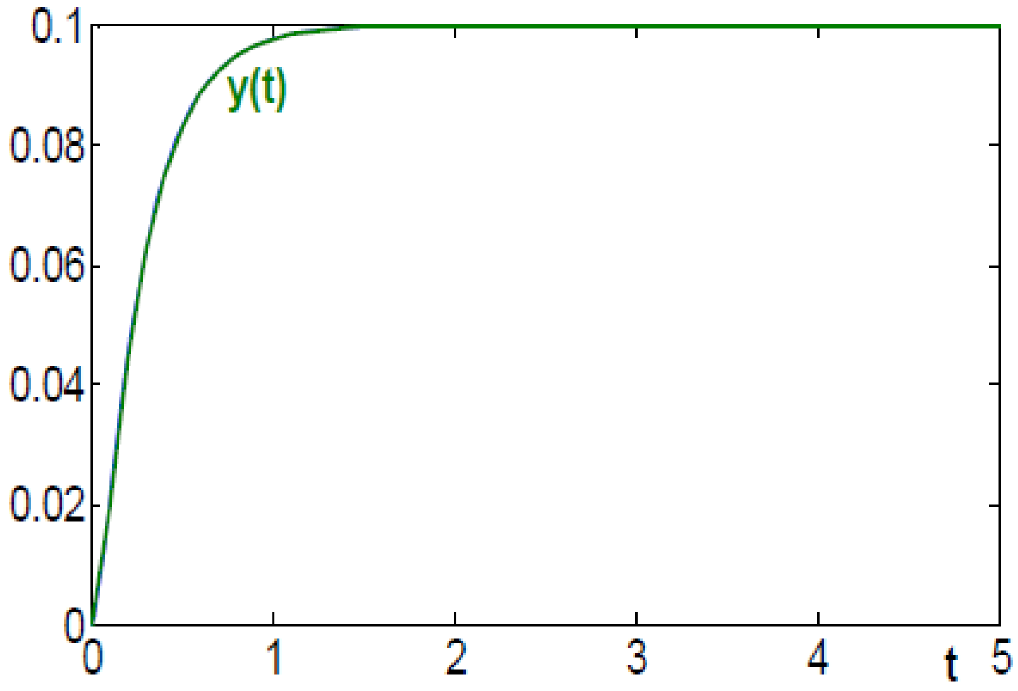
Inverzná Laplaceova transformácia – príklad 1

máme: $$Y(s) = \frac{8}{s(s^2+24s+80)} = \frac{0.1}{s} + \frac{0.025}{(s+20)} - \frac{0.125}{(s+4)}$$

Riešenie odčítame z tabuľky:

$$\boxed{y(t) = 0.1 + 0.025e^{-20t} - 0.125e^{-4t}}$$

Zmena polohy sedačky



MATLAB: Rozklad na parciálne zlomky

help: [R,P,K] = RESIDUE(B,A)

```
 B(s)      R(1)       R(2)             R(n)
 ----  =  --------  + --------  + ... + --------  + K(s)
 A(s)     s - P(1)    s - P(2)         s - P(n)
```

pre jednoduché póly

```
  R(j)        R(j+1)               R(j+m-1)
 --------  + ------------   + ... + ------------
 s - P(j)   (s - P(j))^2           (s - P(j))^m
```

pre m-násobný pól

```
>>[r,p,k]=residue(8,[1  24  80  0])
r =
  2.5000e-002
 -1.2500e-001
  1.0000e-001
p =
   -20
    -4
     0
k =
     []
```

$$\frac{8}{s(s^2+24s+80)}=$$

$$=\frac{0.1}{s}+\frac{0.025}{(s+20)}-\frac{0.125}{(s+4)}$$

MATLAB: Laplaceova a inverzná L transformácia

```
>> syms t s a om    % definicia symbolickych premennych
```

```
>> laplace(exp(-a*t)*sin(om*t))
  ans =
   om/((a + s)^2 + om^2)

>> laplace(exp(-a*t)*cos(om*t))
  ans =
   (a + s)/((a + s)^2 + om^2)
```

```
>> ilaplace(8/s/(s^2+12*s+80)) % inverzna Laplaceova transf

 ans =
  1/10 - (cos(2*11^(1/2)*t) + (3*11^(1/2)*sin(2*11^(1/2)*t))/11)/(10*exp(6*t))
```

```
>> y=vpa(ans,4)    % vycislenie a vypis na 4 platne cifry
 y =
 0.1-(0.1*(cos(6.633*t)+0.9045*sin(6.633*t)))/exp(6.0*t)
```

Inverzná Laplaceova transformácia – príklad 2

Prípad, keď CHP má komplexne združené korene:

Sedačka s iným parametrom tlmenia:

$$y'' + 12\,y' + 80\,y = 8$$

$$[s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)] + 12\,[sY(s) - y(0)\,] + 80\,Y(s) = \boxed{\frac{8}{s}}$$

$$Y(s) = \frac{8}{s(s^2+12s+80)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{\underbrace{s^2+12s+80}}$$

komplexné korene:

-6.0000 + 6.6332i
-6.0000 - 6.6332i

$$A(s^2+12s+80) + Bs^2 + Cs = 8$$

$$s^0:\ 80A = 8 \quad \rightarrow \quad A = 0.1$$

$$s^1:\ 12A + C = 0 \rightarrow C = -12A = -1.2$$

$$s^2:\ A + B = 0 \rightarrow B = -A = -0.1$$

$$Y(s)=\frac{8}{s(s^2+12s+80)}=\frac{0.1}{s}-\frac{0.1s+1.2}{s^2+12s+80}$$

$\boxed{\dfrac{0.1s+1.2}{s^2+12s+80}}$ **treba upraviť na tabuľkový tvar:** $\boxed{\dfrac{\varpi}{(s+a)^2+\varpi^2}}$ **resp.:** $\boxed{\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\varpi^2}}$

$$\frac{0.1s+1.2}{s^2+12s+80}=0.1\frac{s+12}{(s+6)^2+44}=0.1\frac{s+6}{(s+6)^2+44}+0.1\frac{6}{(s+6)^2+44}=$$

$$=0.1\boxed{\frac{s+6}{(s+6)^2+44}}+\frac{0.1*6}{\sqrt{44}}\boxed{\frac{\sqrt{44}}{(s+6)^2+44}}$$

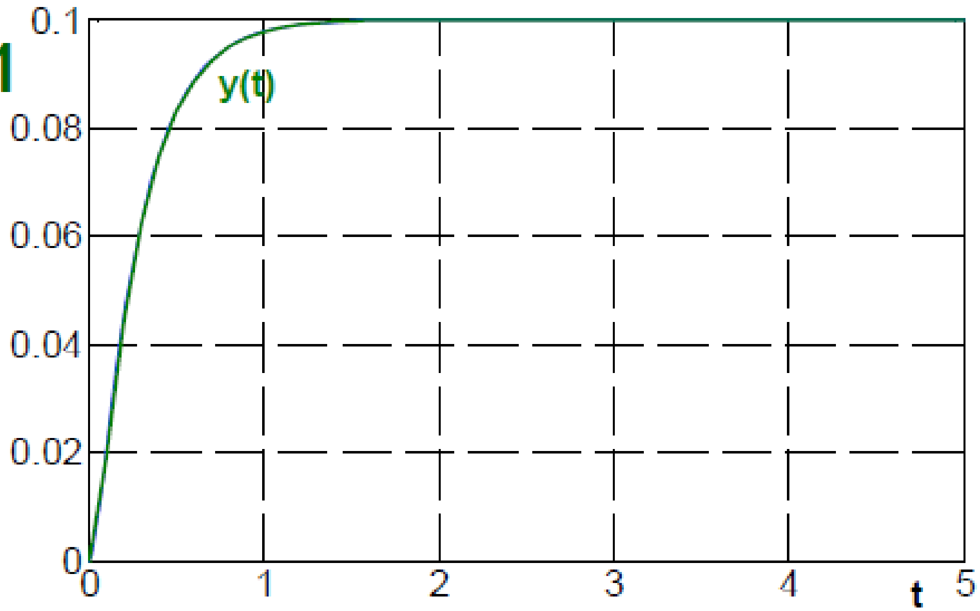
Riešenie odčítame z tabuľky:

$$\boxed{y(t)=0.1-0.1\boxed{e^{-6t}\cos(\sqrt{44}\,t)}-0.0905\boxed{e^{-6t}\sin(\sqrt{44}\,t)}}$$

Zmena polohy sedačky 1

$$y(t) = 0.1 + 0.025e^{-20t} - 0.125e^{-4t}$$

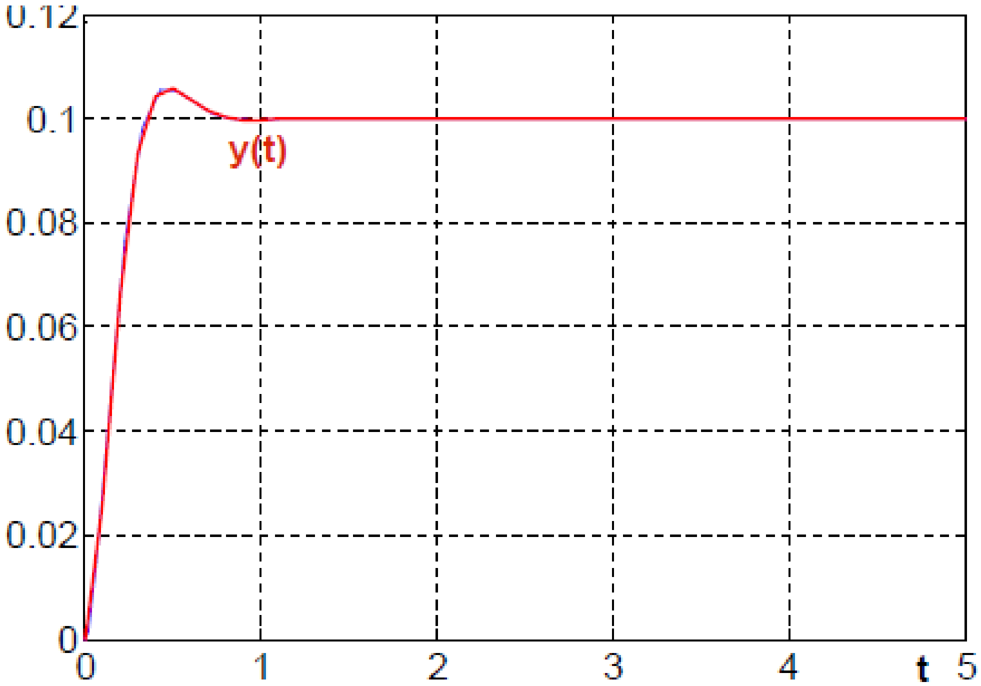
reálne korene CHP: aperiodický priebeh



Zmena polohy sedačky 2

$$y(t) = 0.1 - 0.1\, e^{-6t} \cos(\sqrt{44}\, t) - 0.0905\, e^{-6t} \sin(\sqrt{44}\, t)$$

komplexné korene CHP: kmitavý priebeh



Zdroje

- Materiály k prednáškam a cvičeniam – Danica Rosinová, Alena Kozáková